L'EQUAZIONE G.P.S.

Il principio di funzionamento del G.P.S. si basa essenzialmente su due tipi di misure:

1) misure di *pseudo - distanze*;

2) misure di *battimento di fase della portante*.

- Per quanto al punto 1), ovvero sia, misure di *pseudo – distanze*, inteso come misura della distanza tra satellite e ricevitore; misuriamo il tempo di propagazione di un segnale in codice trasmesso dal satellite, questo segnale viene confrontato con una copia generata dal ricevitore, facendolo scorrere idealmente su una base temporale fino a sovrapporre i due segnali. Lo sfasamento temporale tra i due codici coincide con il tempo di propagazione che moltiplicato per *"c"* fornisce la pseudo – distanza (dove *"c"* è la velocità della luce – 300.000 Km/s).

$$Spazio = S = c \cdot t = velocità \cdot tempo$$

Se t^S = *tempo in cui il satellite emette il segnale;*

t_R = *tempo in cui il segnale viene ricevuto.*

Si ha: $\Delta T = t_R - t^S\ [t_R(GPS) - \delta_R] - [t^S(GPS) - \delta^S] = \Delta T(GPS) + \Delta\delta$

Se, l'errore tempo del satellite (δ^S) è noto, allora $\Delta\delta$ = l'errore tempo del ricevitore (δ_R), e, moltiplicato per la velocità della luce, si ottiene:

$$Spazio = R = c \cdot \Delta T = c \cdot \Delta T(GPS) + c \cdot \Delta\delta = \rho + c \cdot \Delta\delta$$

(Spazio = R = distanza ρ + distanza c · Δδ)

Dove *"ρ"* è calcolata rispetto al vero tempo di viaggio del segnale, che corrisponde alla distanza tra la posizione del satellite all'epoca $t^S(GPS)$ e la posizione dell'antenna ricevente all'epoca $t_R(GPS)$. Questo posizionamento è assoluto, e la precisione ottenuta non è molto alta.

- Per quanto al punto 2), ovvero sia, misure di *battimento di fase della portante*, cioè, misura della differenza tra la fase del segnale proveniente dal satellite, e quella della replica (copia) generata dal ricevitore. La portante del satellite entra in *battimento di fase* con una fase campione costante generata dal ricevitore, dopo di chè si valuta la differenza tra la somma dei cicli ricevuti e la somma di quelli generati dal ricevitore, entro un periodo assegnato successivo.

Se: $\varphi^S(t)$ = fase del segnale portante ricevuto con f^S

$\varphi_R(t)$ = fase del segnale portante generato con f_R

Si ottiene: $\varphi^S(t) = f^S \cdot t - f^S \cdot \rho/c - \varphi_0{}^S = f^S \cdot t - f^S \cdot \rho/c - f^S \cdot \delta^S$

$$\varphi_R(t) = f_R \cdot t - \varphi_{0R} = f_R \cdot t - f_R \cdot \delta_R$$

(fase φ = frequenza f per tempo t, ma anche ρ/c rappresenta un tempo t, come pure δ^S rappresenta un'altro tempo t)

E' importante tener conto del fatto che: la fasi iniziali φ_0^S e φ_{0R} sono affette da errori δ^S e δ_R .

Quindi, la differenza di fase sarà:

$$\varphi_R^S(t) = \varphi^S(t) - \varphi_R(t)$$

questo posizionamento è relativo, e possiede caratteristiche di precisione ottime per fini geodetici.

Differenze Singole, Doppie e Triple

Quando un ricevitore viene messo in funzione, si misura una frazione di fase tra il segnale trasmesso dal satellite ed il segnale generato dal ricevitore.

Il numero intero iniziale di cicli $N(t_0)$ tra satellite e ricevitore è incognito.

Al variare della fase (φ) da 2π a zero, il numero di cicli aumenta di uno (1).

Pertanto, ad una certa epoca , la fase accumulata (φ) è la somma della frazione di fase misurata all'epoca t, più (+) il numero intero di cicli dall'epoca iniziale t_0 all'epoca t, più (+) il numero intero di cicli incognito tra satellite e ricevitore all'epoca t_0.

$$\varphi = F_r(\varphi) + int.(\varphi, t_0, t) + N(t_0)$$

Definiamo: $\varphi^j(t)$ = fase del segnale portante ricevuto con frequenza f^j

$\varphi_i(t)$ = fase del segnale portante generato con frequenza f_i.

Se l'inseguimento è continuo, il *N. int.* di cicli N tra satellite e ricevitore rimane costante.

Tra due epoche successive, per cui si avrà una sola ambiguità per coppia satellite-ricevitore.

In particolare, all'epoca t, la fase sarà:

$$\varphi^j{}_i(t) = \Delta\varphi \Big|_{t_0}^{t} + N^j{}_i$$

mentre lo sfasamento, sarà:

$$\Phi^j{}_i = 1/\lambda \cdot \rho^j{}_i + c/\lambda \cdot \Delta\delta^j{}_i + N^j{}_i$$

Sostituendo $c/\lambda = f^j$

e scomponendo $\Delta\delta^j{}_i = \delta^j(t) - \delta_i(t)$

si ottiene: $$\Phi^j{}_i(t) = 1/\lambda \cdot \rho^j{}_i(t) + N^j{}_i + f^j \cdot \delta^j(t) - f_i \cdot \delta_i(t)$$

Oltre alle ambiguità iniziali bisogna però tener conto di eventuali momentanee perdite del segnale *(cycle-slip).*

Fortunatamente, tutti gli errori che perturbano i segnali GPS ricevuti simultaneamente alle diverse stazioni sono correlati, sicchè il loro effetto può ridursi differenziando le equazioni di osservazioni.

- **Differenza singola:** questa tecnica prevede 2 ricevitori ed 1 satellite, or, 1 ricevitore e 2 satelliti. La differenza singola è la differenza delle misure di fase acquisite dai 2 ricevitori che osservano lo stesso satellite allo stesso istante, or, 2 satelliti ed 1 ricevitore allo stesso istante. Questa tecnica serve ad eliminare gli errori dell'orologio del satellite, or, gli errori dell'orologio del ricevitore.

Supponiamo di avere 2 ricevitori *A* e *B*, ed 1 satellite *J*. Si effettua ai ricevitori *A* e *B* il calcolo degli sfasamenti Φ^j_A e Φ^j_B rispetto al satellite *J :*

$$\Phi^j_A(t) = 1/\lambda \cdot \rho^j_A(t) + N^j_A + f^j \cdot \delta^j(t) - f^j \cdot \delta_A(t)$$

$$\Phi^j_B(t) = 1/\lambda \cdot \rho^j_B(t) + N^j_B + f^j \cdot \delta^j(t) - f^j \cdot \delta_B(t)$$

Differenziando tra i 2 ricevitori si eliminano i *biases* (cioè, gli errori degli orologi e di orbita) specifici dei satelliti.

$$\Phi^j_{AB}(t) = \Phi^j_B(t) - \Phi^j_A(t)$$

si ottiene: $$\Phi^j_{AB}(t) = 1/\lambda \cdot \rho^j_{AB}(t) + N^j_{AB} - f^j \cdot \delta_{AB}(t)$$

- **Differenza doppia:** questa tecnica prevede 2 ricevitori e 2 satelliti allo stesso istante. La doppia differenza serve ad eliminare gli errori sistematici dovuti a ricevitori e satelliti, riducono gli errori nel propagazione dei segnali attraverso l'atmosfera.

Supponiamo ora, di avere un'altro satellite *K*, si effettuano le medesime operazioni (quelle viste nelle differenze singole) e si ottiene una equazione analoga, che, per semplificare, se si utilizza una notazione breve, diventa:

$$\Phi^{jK}_{AB}(t) = 1/\lambda \cdot \rho^{jK}_{AB} + N^{jK}_{AB}$$

- **Differenza tripla:** questa tecnica prevede di calcolare la differenza tra 2 equazioni alle doppie differenze a 2 epoche diverse. Oltre ad eliminare errori sistematici, essa è indipendente dalle ambiguità iniziali di fase, e consente l'identificazione e la prima correzione dei *cycle-slip* (per ogni interruzione della ricezione della fase, si ha una nuova ambiguità incognita).

Continuando nell'esperimento, ed effettuando in un'altra epoca, misure e calcoli analoghi, possiamo supporre (ammettere) che le ambiguità restino costanti. Realizzando, pertanto, una differenza di doppia differenza tra 2 epoche si eliminano le ambiguità *indipendenti dal tempo* e si realizza così la tripla differenza.

$$\Phi^{jK}_{AB}(t_1) = 1/\lambda \cdot \rho^{jK}_{AB}(t_1) + N^{jK}_{AB}$$

$$\Phi^{jK}_{AB}(t_2) = 1/\lambda \cdot \rho^{jK}_{AB}(t_2) + N^{jK}_{AB}$$

differenziando, si ha:

$$\Phi^{jK}_{AB}(t_2) - \Phi^{jK}_{AB}(t_1) = 1/\lambda \, [\rho^{jK}_{AB}(t_2) - \rho^{jK}_{AB}(t_1)]$$

analogamente:

$$\Phi^{jK}_{AB}(t_{12}) = 1/\lambda \cdot \rho^{jK}_{AB}(t_{12})$$

Dott. Giuseppe Scarpino